FUNKTIONENTRAINING
ANALYSIS
TEIL 1

Aufgaben
zum Üben der Grundlagen

Im Teil 1:
Ganzrationale Funktionen
Gebrochen rationale Funktionen
Exponentialfunktionen

Zu fast jeder Fragestellung bzw. Lösung wird das Grundwissen erklärt.
Ideal zum wiederholenden Erlernen der wichtigen Methoden der Analysis

Text Nr. 71210

Stand 4. Juli 2014

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist etwas ganz Besonderes. Er bespricht von wichtigen Funktionen abiturähnliche Aufgaben mit so ausführlichen Lösungen, dass nebenbei in „Wissenskästen“ das benötigte Hintergrundwissen besprochen wird.

Es handelt sich hier bewusst nur um 2 Anwendungsaufgaben. Denn hier soll der mathematische Hintergrund der Funktionsanalyse wiederholt werden. Dabei lernt man **die wichtigsten Methoden**, die man dann bei Anwendungsaufgaben benötigt.

Um eine ganz breite Leserschicht anzusprechen liefere ich (fast) alle Lösungen sowohl in **manueller Ausführung wie auch mit dem Einsatz von CAS-Rechnern** (TI Nspire und CASIO ClassPad). Deren Handhabung wird auch sehr ausführlich besprochen.

Ein Schüler, der sich hiermit optimal auf eine Analysis-Prüfung vorbereiten will, kann also genau die Methoden auswählen und trainieren, die seinen Anforderungen gerecht werden.

Wer mit CAS arbeiten darf, sollte dabei nicht vergessen, dass er die CAS-Ergebnisse auf das Lösungsblatt übertragen muss, was er an Hand der gezeigten manuellen Lösung dann auch nachvollziehen kann. Er/Sie muss dann lediglich einige CAS-Befehle zusätzlich aufschreiben und dazu die Ansätze und die Ergebnisse.

Am Ende des Textes gibt es ein **Stichwortregister**, das anzeigt, wo man welche Methode findet!

Inhalt

Aufgabe 1 – ganzrational

(Grundaufgaben zur Parabel)

a) Eine Parabel K geht durch $A(1|-4)$, $B(5|-4)$ und $C(2|2)$.
Bestimme ihre Gleichung. Berechne den Scheitel und die Nullstellen.

b) Eine zweite Parabel H hat ihren Scheitel bei 1 und berührt die Gerade g: $y = 4x - 14$ bei 4.
Bestimme ihre Gleichung. Berechne den Scheitel und die Nullstellen.

c) Zeichne beide Parabeln.
Berechne ihre Schnittpunkte und die Länge der gemeinsamen Sehne.

d) In welchen Punkten haben K und H eine Tangente parallel zur gemeinsamen Sehne?
Stelle die Gleichungen auf.

e) Unter welchen Winkeln schneiden sich die Parabeln?

f) Wie groß ist die von beiden Parabeln umschlossene Fläche?

g) Jede zur y-Achse parallele Gerade mit der Gleichung $x = u$ schneidet die beiden Parabeln. So entstehen zwischen den beiden Schnittpunkten der Parabeln vertikale Strecken unterschiedlicher Länge.

Gib die Länge der Strecke in Abhängigkeit von u an.
Welche dieser Strecken hat die größte Länge und wie lang ist sie wirklich?

Aufgabe 2 - ganzrational

Zu jedem $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für $x \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - tx^2 + \tfrac{1}{2}t^2x$$

K_t sei das Schaubild von f_t.

a) Untersuche K_t auf gemeinsame Punkte mit **den** Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichne K_3 im Bereich $-1 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm)

b) Welche Kurve C bilden die Wendepunkte W_t der Kurven K_t für alle zugelassenen Werte von t? Für welche Werte von t schneiden C und K_t einander in W_t senkrecht?

c) Lege vom Punkt $Q(0|-16)$ die Tangente an die Kurve K_3. Berechne ihren Berührpunkt.
Hilfe: Er hat eine ganzzahlige x-Koordinate.

d) Eine Parabel 2. Ordnung P_t geht durch die gemeinsamen Punkte von K_t mit der x-Achse und berührt K_t im Ursprung. Stelle deren Gleichung auf und weise nach, dass K_t und P_t keine weiteren gemeinsamen Punkte haben.

e) In welchem Verhältnis teilt K_t die von P_t und der x-Achse eingeschlossene Fläche?

f) Welche Beziehung muss zwischen r und s ($r \neq s$) bestehen, damit sich die Kurven K_r und K_s im Ursprung berühren?

Zeige: Zwei Kurven K_r und K_s, die sich nicht im Ursprung berühren, schneiden sich in genau zwei Punkten.

Aufgabe 3 – gebrochen rational

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x-1}$

a) Untersuche ihr Schaubild K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K im Bereich $-4\le x\le 5$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) $P(u\,|\,f(u))$ liegt auf der Kurve K mit $u > 1$. Die Parallele zur senkrechten Asymptote durch P schneidet die schräge Asymptote in R. Die Parallele zur schrägen Asymptote durch P schneidet die senkrechte Asymptote in Q. Der Asymptotenschnittpunkt ist S.
Berechne den Inhalt des Parallelogramms PQRS. Deute das Ergebnis.

c) Zeige, dass das Schaubild K punktsymmetrisch zum Punkt $S(1\,|\,0)$ ist.

d) K begrenzt mit den Koordinatenachsen im 2. Feld ein Flächenstück. Berechne seinen Inhalt.

e) Die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt $B(u\,|\,f(u))$ mit $u > 1$ schneidet die Asymptoten in C und D. S sei deren Schnittpunkt.
Für welche Lage des Punktes B nimmt das Dreieck DCS einen extremen Inhalt an?
Berechne seine Größe.

Aufgabe 4 – gebrochen rational

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, ihr Schaubild sei K.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich.
Untersuche K auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x-Achse, auf Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte sowie Asymptoten.
Zeichne K im Bereich $-3\le x\le 3$ samt Asymptoten mit Längeneinheit 2 cm.

b) $P(u\,|\,f(u))$ sei ein Punkt auf dem Graphen von f für $u > 0$. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ. Besitzt dieses für eine bestimmte Lage von P einen extremen Inhalt?

c) Im 1. Feld wird ein Dreieck ABCD so eingezeichnet, dass C und D auf K liegen, A und B auf der x-Achse. Durch **Drehung dieses Rechtecks um die x-Achse** entsteht ein Zylinder.
Berechne das Volumen dieses Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h des Rechtecks.
Für welche Lage von C und D erhält dieses Zylindervolumen ein Maximum?

d) Berechne diejenige Stammfunktion F zu f, deren Graph durch den Punkt $S(1\,|\,1)$ geht.
Ist die Funktion $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{für } x>1 \\ F(x) & \text{für } x\le 1\end{cases}$
überall stetig und differenzierbar?

Aufgabe 5 - Exponentialfunktion

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{2}{3 \cdot e^x - 1}$

a) Bestimme den Definitionsbereich, die Asymptoten und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
Untersuche f auf **Monotonie** und gib die Wertmenge von f an.
Zeichne das Schaubild K von f für $-4 \leq x \leq 3$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) Begründe, warum f umkehrbar ist und gib die Gleichung der **Umkehrfunktion** g an.
Welchen Definitionsbereich hat g?

c) P (u I v) sei ein Punkt auf K im 1. Feld.
Die Koordinatenachsen und ihre Parallelen durch P begrenzen ein Rechteck.
Für welchen Wert von u ist der **Umfang des Rechtecks** am kleinsten?

d) Zeige, dass die Kurve C mit der Gleichung $y = \dfrac{2e^x}{3 - e^x}$ das **Spiegelbild** von K an der y-Achse ist. Welche Gleichung hat die Kurve L, die durch Spiegelung von K an der Geraden y = - 1 entsteht?

Aufgabe 6 - Exponentialfunktion

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x + t) \cdot e^{-x}$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuche K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie Extrempunkte.

b) Zeichne K_1 und K_2 in ein gemeinsames Achsenkreuz (x-Achse von -3 bis 5, y-Achse von -4 bis 4, LE 1 cm.)

c) Gib die Gleichung der Ortskurve aller Hochpunkte an.

d) Die Gerade x = u mit u > 0 schneidet K_1 in Q und K_2 in P.
Für welchen Wert von u nimmt der Inhalt des Dreiecks OPQ einen extremen Inhalt an?
Gib diesen Extreminhalt an und bestimme seine Art.

e) K_1, K_2 und die Koordinatenachsen begrenzen im 2. Feld eine Fläche A. Berechne ihren Inhalt.

K_1, K_2, die y-Achse und die Gerade x = r mit r > 0 begrenzen eine Fläche B(u).
Berechne deren Inhalt sowie ihren Grenzwert B* für $r \to \infty$.

Aufgabe 7 - Wachstumsfunktion

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit

$$r(t) = 10000 \cdot \left(e^{-0,5t} - e^{-t}\right) \quad ; \quad 0 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, r(t) in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate.
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab? (4 VP)

b) Wie viel Wasser befindet sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank?
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank? (4 VP)

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion w mit

$$w(t) = r(t) - 400 \quad ; \quad 3 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, w(t) in Liter pro Stunde).

Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank.

Aufgabe 8 - Wachstumsfunktion

3.1 Die Höhe h(t) eines Baumes zum Zeitpunkt t wird näherungsweise beschrieben durch

$$h(t) = \frac{35}{160 \cdot e^{-0{,}07632 \cdot t} + 1} \quad \text{mit} \quad t \geq 0$$

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit Pflanzung des Baums im Frühling 1930,
h(t) ist in m angegeben.

3.1.1 Berechnen Sie das Jahr, in dem der Baum am schnellsten gewachsen ist.
Wann war der Baum zu 75 % ausgewachsen?

3.1.2 Bestimmen Sie das durchschnittliche Jahreswachstum des Baums der letzten zehn Jahre.

3.2 Im Jahr 2013 wird der Durchmesser d(x) des Baumstamms in der Höhe x über dem Boden modelliert durch die Funktion d mit

$$d(x) = -3{,}003 \cdot 10^{-9} x^3 + 9{,}000 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 1{,}682 \cdot 10^{-2} x + 39{,}73$$

d(x) und x sind in cm angegeben.

In diesem Jahr wird der Baum gefällt. Der Schnitt wird in einer Höhe von 30 cm über dem Boden angesetzt.

3.2.1 Berechnen Sie den Durchmesser der Schnittfläche.
Bestimmen Sie die Länge des abgeschnittenen Stamms, die sich aus diesem Modell ergibt.

3.2.2 Ermitteln Sie das Volumen des Stamms in Kubikmeter.

Kurz vor der Fällung wurde der Durchmesser des Baumstamms in der Schnitthöhe auf 40 cm und die Länge des Stamms auf 30 m geschätzt. Das Volumen des Stamms wurde damit schon vorab geschätzt, wobei die Form des Stamms vereinfachend als Kreiskegel angenommen wurde.
Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des geschätzten Volumens vom oben ermittelten Volumen.

Lösungen

Lösung Aufgabe 1

a) Eine Parabel K geht durch $A(1|-4)$, $B(5|-4)$ und $C(2|2)$.
Bestimme ihre Gleichung. Berechne den Scheitel und die Nullstellen.

WISSEN: *Man ordnet der Parabel eine Funktion p zu, die man so ansetzt:* $p(x) = ax^2 + bx + c$.
Sie muss diese Bedingungen erfüllen: $p(1) = -4$, $p(5) = -4$ *und* $p(2) = 2$.
Diese führen zu einem Gleichungssystem für die Unbekannten a, b, c.

Manuelle Lösung

Bedingungen:

$A(1\|-4) \in K$	d. h.	$p(1) = -4$	d. h.	$a + b + c = -4$	(1)
$B(5\|-4) \in K$	d. h.	$p(5) = -4$	d. h.	$25a + 5b + c = -4$	(2)
$C(2\|2) \in K$	d. h.	$p(2) = 2$	d. h.	$4a + 2b + c = 2$	(3)

Elimination von c: (2) – (1): $24a + 4b = 0$ (4)

(3) – (1): $3a + b = 6$ (5)

Elimination von b: $(4) - 4 \cdot (5)$: $12a = -24 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

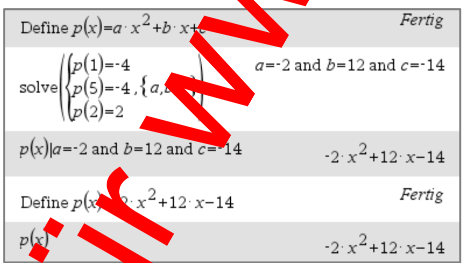
in (5): $-6 + b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 12}$

in (1): $10 + c = -4 \Rightarrow \boxed{c = -14}$

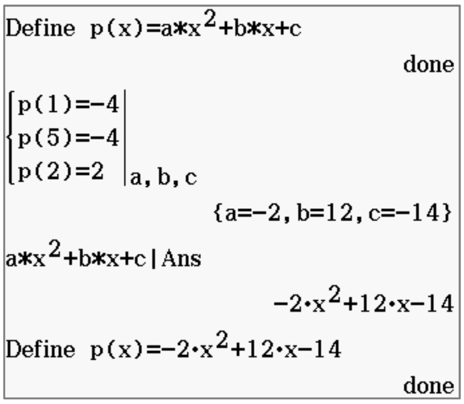
Ergebnis: $p(x) = -2x^2 + 12x - 14$

CAS-Lösungen:

TI Nspire



CASIO ClassPad



CASIO verlangt zur Lösung eines Gleichungssystems nicht den Befehl „Solve“!

Wichtig:

Wenn die Lösungen erscheinen, ist die Parabelfunktion noch nicht exakt definiert.

Dies macht man, indem man sich den Parabelterm durch Einsetzen (mit dem Bedingungsstrich |) anzeigen lässt und dann in eine neue Definition übernimmt.

b) Eine zweite Parabel H hat ihren Scheitel bei 1 und berührt die Gerade g: y = 4x - 14 bei 4. Bestimme ihre Gleichung. Berechne den Scheitel und die Nullstellen.

WISSEN: *Jetzt lautet die erste Bedingung: H hat bei 1 eine waagrechte Tangente.*
Für die Parabelfunktion h heißt das: $h'(1) = 0$.
Weil H die Gerade g bei x_B = 4 berührt, hat sie dort dieselbe x-Koordinate, also $y_B = 2$,
und auch dieselbe Steigung, d.h. $f'(4) = m_g = 4$

Manuelle Lösung

Ansatz: $h(x) = rx^2 + sx + t$ (Man sollte nicht wieder a, b, c verwenden.)

$h'(x) = 2rx + s$

Bedingungen:

$h'(1) = 0$	d. h.	$2r + s = 0$	(1)
$h(4) = 2$	d. h.	$16r + 4s + t = 2$	(2)
$h'(4) = 4$	d. h.	$8r + s = 4$	(3)

Elimination von b: (3) – (1): $6r = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{r = \frac{2}{3}}$

Aus (1) folgt: $s = -2r \;\Rightarrow\; \boxed{s = -\frac{4}{3}}$

Aus (2) folgt: $\frac{32}{3} - \frac{16}{3} + t = 2 \;\Rightarrow\; t = 2 - \frac{16}{3} \;\Rightarrow\; \boxed{t = -\frac{10}{3}}$

Ergebnis: $h(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

CAS-Lösungen:

TI Nspire / *CASIO ClassPad*

Die Ableitungsfunktion kann man berechnen lassen (CASIO) oder selbst eingeben (Nspire).

Ab der 4. Zeile wird h neu definiert. Dazu lässt man zuerst die Werte von r, s und t einsetzen.

Dazu schreibe man h(x) | ans als Befehl auf. Das habe ich auch bei Nspire getan, nur dort wurde ans sofort ersetzt.

TI Nspire:

Define $h(x)=r\cdot x^2+s\cdot x+t$ — Fertig

Define $h1(x)=2\cdot r\cdot x+s$ — Fertig

solve$\left(\begin{cases} h1(1)=0 \\ h(4)=2 \\ h1(4)=4 \end{cases},\{r,s,t\}\right)$ — $r=\frac{2}{3}$ and $s=\frac{-4}{3}$ and $t=\frac{-10}{3}$

$h(x)|r=\frac{2}{3}$ and $s=\frac{-4}{3}$ and $t=\frac{-10}{3}$ — $\frac{2\cdot x^2}{3}-\frac{4\cdot x}{3}-\frac{10}{3}$

Define $h(x)=\frac{2\cdot x^2}{3}-\frac{4\cdot x}{3}-\frac{10}{3}$ — Fertig

CASIO ClassPad:

Define $h(x)=r*x^2+s*x+t$ — done

Define h1(x)=diff(h(x)) — done

$\begin{cases} h1(1)=0 \\ h(4)=2 \\ h1(4)=4 \end{cases}\Big|_{r,s,t}$ — $\left\{r=\frac{2}{3}, s=-\frac{4}{3}, t=-\frac{10}{3}\right\}$

h(x)|ans — $\frac{2\cdot x^2}{3}-\frac{4\cdot x}{3}-\frac{10}{3}$

Define $h(x)=\frac{2\cdot x^2}{3}-\frac{4\cdot x}{3}-\frac{10}{3}$

Bestimmung von Nullstellen

Manuelle Lösung:

WISSEN: *Nullstellen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse. Dort sind alle y-Koordinaten Null. Die Bedingung lautet daher* $h(x) = 0$. *Diese führt hier auf eine quadratische Gleichung, die man mit der sogenannten* ***Mitternachtsformel*** *lösen sollte (ich rate dringend von der sicher in vielen Fällen günstigen p-q-Formel ab):* $ax^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} = 0 \quad |:\frac{2}{3} \text{ d. h. } |\cdot\frac{3}{2}$ ergibt $x^2 - 2x - 5 = 0$

$$x_N = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4\cdot 6}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1 \pm \sqrt{6} \approx \begin{cases} 3{,}45 \\ -1{,}45 \end{cases}$$

Ergebnis: $N_1\left(1-\sqrt{6}\,|\,0\right) \approx (-1{,}45\,|\,0)$, $N_2\left(1+\sqrt{6}\,|\,0\right) \approx (3{,}45\,|\,0)$

CAS-Lösungen:

TI Nspire:

solve$(h(x)=0,x)$ — $x=-(\sqrt{6}-1)$ or $x=\sqrt{6}+1$

solve$(h(x)=0,x)$ — $x=-1.44949$ or $x=3.44949$

CASIO ClassPad:

Solve(h(x)=0, x) — $\{x=-\sqrt{6}+1, x=\sqrt{6}+1\}$

Solve(h(x)=0, x) — $\{x=-1.44949, x=3.44949\}$

Bestimmung des Scheitels

WISSEN:

Hierzu gibt es verschiedene Lösungen.

1. *Kennt man die Nullstellen der Parabel, dann ist die Scheitelstelle genau die Mitte:*

   Wenn z. B. -1 und 5 die Nullstellen sind, dann ist die Scheitelstelle: $x_S = \frac{-1+5}{2} = 2$

   In vorliegendem Falle ist es noch einfacher, wenn man die Nullstellen exakt berechnet: $x_N = \frac{\boxed{2} \pm 2\sqrt{6}}{\boxed{2}} = \boxed{1} \pm \sqrt{6}$. *Dann sieht man, dass sie symmetrisch zu x = 1 liegen, nämlich um* $\sqrt{6}$ *links. bzw. rechts davon. Also ist die Symmetrieachse die Gerade x =1, und darauf liegt der Scheitel*

2. *Im Scheitel hat die Parabel eine waagerechte Tangente, also muss die Ableitung dort den Wert 0 haben. Aus der Bedingung* $h'(x) = 0$ *folgt die Scheitelstelle.*

3. *Weil die allgemeine Parabel* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *die Ableitung* $f'(x) = 2ax + b$ *hat, bedeutet* $f'(x) = 0 \quad 2ax + b = 0$, *woraus die Formel* $x_S = -\frac{b}{2a}$ *folgt.*

   Dies erkennt man aber auch aus der Mitternachtsformel (wie in 1. beschrieben).

Manuelle Lösung:

´Für die Nullstellen wurde berechnet $x_N = \frac{\boxed{2} \pm 2\sqrt{6}}{\boxed{2}} = \boxed{1} \pm \sqrt{6}$, also liegt der Scheitel auf der Parabelachse x = 1. $h(1) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{12}{3} = -4$

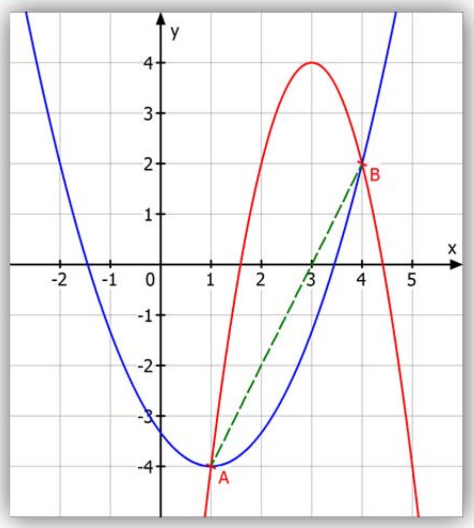
Ergebnis: $S(1|-4)$

CAS-Lösung:

```
Solve(h1(x)=0,x)
                {x=1}
h(1)
                   -4
```

c) Zeichne beide Parabeln.
Berechne ihre Schnittpunkte A und B und die Länge der gemeinsamen Sehne.

Manuelle Lösung:



Schnittpunkte der Parabeln:

1. Parabel: $p(x) = -2x^2 + 12x - 14$

2. Parabel: $h(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

Schnittgleichung: $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} = -2x^2 + 12x - 14 \quad |\cdot 3$

$$2x^2 - 4x - 10 = -6x^2 + 36x - 42$$

$$8x^2 - 40x + 32 = 0 \quad |:8$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

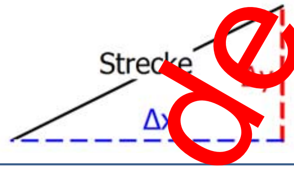
y-Koordinaten: $p(4) = -32 + 48 - 14 = 2$ und $p(1) = -2 + 12 - 14 = -4$

Ergebnis: Die Schnittpunkte sind $A(1|-4)$ und $B(4|2)$.

Länge der Sehne

WISSEN: *Die Länge einer schrägen Strecke berechnet man mit dem Satz des Pythagoras:*

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

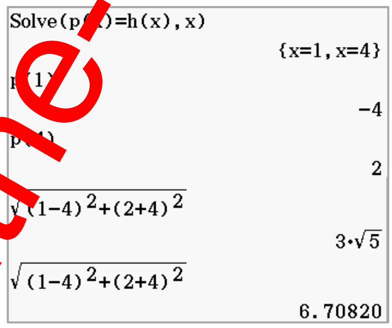


Die Schnittpunkte sind $A(1|-4)$ und $B(4|2)$.

$$L = \sqrt{(4-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \approx 6{,}71 \quad (LE)$$

CAS-Lösung: Hier reicht der Screenshot eines der beiden Geräte.

Wenn man beide Parabeln durch Funktionen definiert hat, kann man zur Schnittpunktsberechnung deren Terme gleichsetzen.



d) In welchen Punkten haben K und H eine Tangente parallel zur gemeinsamen Sehne? Stelle die Gleichungen auf.

WISSEN: ***Parallele Geraden** haben dieselbe Steigung. Diese berechnet man hier aus den Koordinaten der Schnittpunkte:* $m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *(s. oben)*

Damit die Tangente dieselbe Steigung erhält, muss man die Berührstellen suchen, für die gilt $p'(x) = m$ *bzw.* $h'(x) = m$

Manuelle Lösung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-4)}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$ (Dies kann man auch an der Zeichnung erkennen)

Parabel K: $p(x) = -2x^2 + 12x - 14$ $\qquad p'(x) = -4x + 12$

Bed.: $p'(x) = 2 \Leftrightarrow -4x + 12 = 2 \Leftrightarrow -4x = -10 \Leftrightarrow x_1 = 2{,}5$

$y_1 = p\left(\frac{5}{2}\right) = -2\cdot\frac{25}{4} + 12\cdot\frac{5}{2} - 14 = -12{,}5 + 30 - 14 = 3{,}5$

Der Berührpunkt ist also: $P_1(2{,}5\,|\,3{,}5)$

Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungsform aufstellen: $y - y_1 = m\cdot(x - x_1)$

$y - 3{,}5 = 2\cdot(x - 2{,}5)$ ergibt $y = 2x - 1{,}5$

Parabel H: $h(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ $\qquad h'(x) = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

Bed.: $h'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x_2 = 2{,}5$

$y_2 = h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{25}{4} - \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2} - \frac{10}{3} = \frac{25-20-20}{6} = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$

Der Berührpunkt ist also: $P_2(2{,}5\,|\,-2{,}5)$

Tangentengleichung: $y + 2{,}5 = 2\cdot(x - 2{,}5)$ ergibt $y = 2x - 7{,}5$

CAS-Lösung:

TI Nspire | **CASIO ClassPad**

Nach der Definition der Ableitungsfunktionen sucht man die Parabelstelle, in der die Tangentensteigung 2 ist und zwar an K und dann an H.

Die Tangente wird so erstellt: $y = m(x - x_1) + y_1$

Bei CASIO vereinfacht man sofort mit Expand.

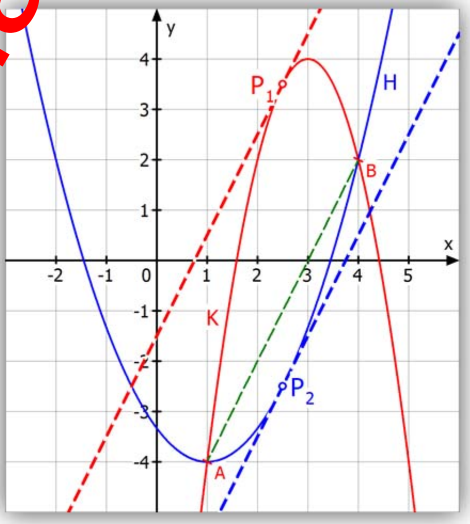
TI Nspire:

Define $p1(x)=\frac{d}{dx}(p(x))$	*Fertig*
Define $h1(x)=\frac{d}{dx}(h(x))$	*Fertig*
solve$(p1(x)=2,x)$	$x=\frac{5}{2}$
$p\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$
$y=2\cdot(x-2.5)+3.5$	$y=2\cdot x-1.5$
solve$(h1(x)=2,x)$	$x=\frac{5}{2}$
$h\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{-5}{2}$
$y=2\cdot(x-2.5)-2.5$	$y=2\cdot x-5.5$

CASIO ClassPad:

Define p1(x)=diff(p(x))	done
Define h1(x)=diff(h(x))	done
Solve(p1(x)=2, x)	$\{x=\frac{5}{2}\}$
p(2.5)	$\frac{7}{2}$
expand(y=2*(x−2.5)+3.5)	$y=2\cdot x-\frac{3}{2}$
Solve(h1(x)=2, x)	$\{x=\frac{5}{2}\}$
h(2.5)	$-\frac{5}{2}$
expand(y=2*(x−2.5)−2.5)	$y=2\cdot x-\frac{15}{2}$

Schaubild mit Tangenten (MatheGrafix):



e) Unter welchen Winkeln schneiden sich die Parabeln?

WISSEN:

Der Schnittwinkel zweier Geraden folgt aus:

$$\tan\gamma = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

Der Betrag sorgt dafür, dass der kleinere Winkel berechnet wird.

Wird der Nenner Null, sind die Geraden orthogonal: $m_1 \cdot m_2 = -1$ *bzw.* $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Manuelle Lösung:

Die Tangentensteigungen werden berechnet mittels $p'(x) = -4x + 12$ und $h'(x) = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

1. Im Schnittpunkt $A(1|-4)$: $p'(1) = -4 + 12 = 8$ $\quad h'(1) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$

$$\tan\alpha_1 = \left|\frac{8-0}{1+8\cdot 0}\right| = 8 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 = \tan^{-1}(8) \approx 82{,}9^\circ$$

(2. Schnittwinkel: $\alpha_2 \approx 180^\circ - 82{,}9^\circ = 97{,}1^\circ$)

2. Im Schnittpunkt $B(4|2)$:atn $p'(4) = -16 + 12 = -4$ $\quad h'(4) = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$$\tan\beta_1 = \left|\frac{4+4}{1-16}\right| = \frac{8}{15} \quad\Rightarrow\quad \beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) \approx 28{,}1^\circ$$

(2. Schnittwinkel: $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 151{,}9^\circ$)

CAS-Lösung:

CASIO ClassPad

Hier wird man alles in die Formel hineinschreiben.
Bei Nspire gibt es keinen Unterschied.

$\tan^{-1}\left(\text{abs}\left(\frac{p1(1)-h1(1)}{1+p1(1)*h1(1)}\right)\right)$	
	82.87498
$\tan^{-1}\left(\text{abs}\left(\frac{p1(4)-h1(4)}{1+p1(4)*h1(4)}\right)\right)$	
	28.07249

f) Wie groß ist die von beiden Parabeln umschlossene Fläche?

WISSEN: *Für die umschlossene Fläche ist K die obere Kurve (Schaubild von p) und H die untere Kurve (Schaubild von h). Dann rechnet man:*

$A = \int_1^4 (p(x) - h(x))\,dx$, *wobei 1 und 4 die Schnittstellen sind.*

Manuelle Lösung:

$$A = \int_1^4 \left(\left(-2x^2 + 12x - 14\right) - \left(\tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{10}{3}\right)\right)dx = \int_1^4 \left(-\tfrac{8}{3}x^2 + \tfrac{40}{3}x - \tfrac{32}{3}\right)dx$$

$$A = \left[-\tfrac{8}{3}\cdot\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{40}{3}\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{32}{3}x\right]_1^4$$

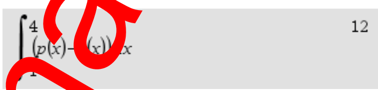
In der eckigen Klammer steht die Stammfunktion F(x). Man rechnet jetzt: $F(4) - F(1)$

$$A = \left[-\tfrac{8}{9}\cdot 64 + \tfrac{20}{3}\cdot 16 - \tfrac{32}{3}\cdot 4\right] - \left[-\tfrac{8}{9} + \tfrac{20}{3} - \tfrac{32}{3}\right]$$

Taschenrechner-Ergebnis: $A = 12$ (FE)

CAS-Lösung:

TI Nspire:



Mit einem CAS-Rechner ist das kein Aufwand.

g) Jede zur y-Achse parallele Gerade mit der Gleichung x = u schneidet die beiden Parabeln. So entstehen zwischen den beiden Schnittpunkten der Parabeln vertikale Strecken unterschiedlicher Länge.

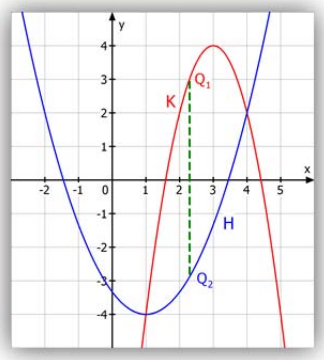
Gib die Länge der Strecke in Abhängigkeit von u an.
Welche dieser Strecken hat die größte Länge und wie lang ist sie wirklich?

WISSEN: *Diese Extremwertaufgabe verlangt die Aufstellung der Zielfunktion „Länge" L(u) mit Definitionsbereich* $\mathbf{D}_u = [\,1;4\,]$.

Die Länge einer vertikalen Strecke ist $L(u) = y_{oben} - y_{unten}$

Dann folgt die Notwendige Bedingung: $L'(u) = 0$.

Für die Lösung u_E *muss die hinreichende Bedingung* $L''(u_E) < 0$ *sein. Die maximale Länge ist dann ein absolutes Maximum, weil die Randwerte 0 sind.*



Manuelle Lösung:

Parabel K: $p(x) = -2x^2 + 12x - 14$ $\qquad Q_1(u\,|\,p(u)) \in K$

Parabel H: $h(x) = \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{10}{3}$ $\qquad Q_2(u\,|\,h(u)) \in H$

Zielfunktion (Länge der Strecke Q_1Q_2: $\quad L(u) = p(u) - h(u) \qquad$ mit $\mathbf{D}_u = [\,1;4\,]$

$$L(u) = -2u^2 + 12u - 14 - \left(\tfrac{2}{3}u^2 - \tfrac{4}{3}u - \tfrac{10}{3}\right) = -\tfrac{8}{3}u^2 + \tfrac{40}{3}u - \tfrac{32}{3}$$

Ableitungen: $L'(u) = -\tfrac{16}{3}u + \tfrac{40}{3}$, $\quad L''(u) = -\tfrac{16}{3}$

Notwendige Bedingung: $L'(u) = 0$ $\qquad -\tfrac{16}{3}u + \tfrac{40}{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; 16u = 40 \;\Leftrightarrow\; u = \tfrac{40}{16} = \tfrac{5}{2} = 2{,}5$

Hinreichende Bedingung: $L''(2{,}5) < 0 \;\Rightarrow\;$ Maximum.

Maximaler Wert: $L\left(\tfrac{5}{2}\right) = -\tfrac{8}{3}\cdot\tfrac{25}{4} + \tfrac{40}{3}\cdot\tfrac{5}{2} - \tfrac{32}{3} = -\tfrac{50}{3} + \tfrac{100}{3} - \tfrac{32}{3} = \tfrac{18}{3} = 6$ (LE)

Randwerte: $L(1) = L(4) = 0$, also liegt ein absolutes Maximum vor.

Stichwortverzeichnis